数理解析研究所講究録
231巻 1975年 1-11

Wishart行列の固有ベクトルの分布の漸近展開

広島大 理　　杉浦 成昭

1つ又は2つのWishart行列の固有ベクトルの分布の漸近展開をPerturbation method により求める．ただし対応する母集団での固有値は単根とする．固有ベクトルのnormalization の仕方により漸近分布のorderが変ることも示される．このことは標本共分散行列から主成分分析等を行うときに注意する必要があるように思われる．

§1．一標本問題．SをWishart分布$W_p(n, \Gamma)$，$\Gamma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$　$\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_p > 0$に従う行列とし，$S$の$\alpha$番目に大きい固有根に対応する固有ベクトルを$f_\alpha = (f_{1\alpha}, \cdots, f_{p\alpha})'$（$f_{\alpha\alpha} > 0$）とおく．$m = n - 2\Delta$（$\Delta$は補正項）とし$m \to \infty$のときを考える．$S/m$は$\Gamma$に確率収束するから$f_\alpha$の$\frac{1}{m}S = \Gamma$の周りでのTaylor展開は$\lambda_\alpha$が単根のとき可能でありPerturbationにより求めることができる．（Sugiura (1974)）$a_{ij} = s_{ij}/m - \lambda_i \delta_{ij}$とおくとき次のようになる．

$$f_{h\alpha}(h \neq \alpha) = -\frac{a_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha} - \frac{a_{\alpha\alpha}a_{h\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2} + \frac{1}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{hl}a_{l\alpha}}{\lambda_l-\lambda_\alpha} - \frac{a_{\alpha\alpha}^2 a_{h\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^3}$$
$$+\frac{a_{\alpha\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{hl}a_{l\alpha}}{\lambda_l-\lambda_\alpha} + \frac{a_{h\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{l\alpha}^2}{\lambda_l-\lambda_\alpha} + \frac{a_{\alpha\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{hl}a_{l\alpha}}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}$$
$$-\frac{1}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{\substack{l\neq\alpha\\ j\neq\alpha}}\frac{a_{hl}a_{lj}a_{j\alpha}}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)(\lambda_j-\lambda_\alpha)} + \frac{1}{2}\frac{a_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{l\alpha}^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2} + (\text{高次の項}) \tag{1.1}$$

$$f_{\alpha\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{l\alpha}^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2} - \sum_{l\neq\alpha}\frac{a_{\alpha\alpha}a_{l\alpha}^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^3} + \sum_{\substack{l\neq\alpha\\ j\neq\alpha}}\frac{a_{l\alpha}a_{lj}a_{j\alpha}}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2(\lambda_j-\lambda_\alpha)} + (\text{高次の項}).$$

ただし $\|f_\alpha\| = 1$ とする． $a_{h\alpha}(h\neq\alpha)$ は漸近的に $N(0, \frac{\lambda_\alpha\lambda_h}{n})$ に従い， $a_{\alpha\alpha}$ は漸近的に $N(0, \frac{2\lambda_\alpha^2}{n})$ に従うから (1.1) より $\sqrt{n}\,f_{h\alpha}(h\neq\alpha)$ は漸近的に $N(0, \lambda_\alpha\lambda_h/(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2)$ に従うことおよび $\sqrt{n}(f_{\alpha\alpha}-1) = o_p(1)$ であることがわかる．これらは Anderson (1963) の結果と一致する．更に $f_{\alpha\alpha}$ については $-2n(f_{\alpha\alpha}-1)$ の極限分布が独立な χ^2 分布の weighted sum となること，すなわち $\sum_{\substack{l\neq\alpha\\ \alpha}}[\lambda_\alpha\lambda_l/(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2]\chi_l^2$ となることがわかる． $e_\alpha = (0,\cdots,0\ 1\ 0,\cdots,0)$ とおけば (1.1) より $\sqrt{m}(f_\alpha - e_\alpha)$ の特性関数を次のように評価できる．

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}\right\}\cdot\left[1+\frac{g}{\sqrt{m}}+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{3} i^{2j}h_{2j} + O\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)\right]$$

$$g = -\frac{i}{2}t_\alpha\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2} - \frac{i^3}{2}t_\alpha\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha^2\lambda_l^2t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^4},$$

$$h_2 = -\Delta\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2} + \sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^4}\left(\lambda_\alpha^2+\lambda_l^2-\frac{1}{2}\lambda_\alpha\lambda_l\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_\alpha\lambda_h\lambda_l t_h^2}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2(\lambda_l-\lambda_\alpha)}+\frac{3}{8}t_\alpha^2\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha^2\lambda_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^4}\\
&+\frac{t_\alpha^2}{8}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_\alpha^2\lambda_h\lambda_l}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\ ,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
h_4 &= \frac{1}{4}\lambda_\alpha^2\left\{\sum_{h\neq\alpha}\frac{\lambda_h t_h^2}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\right\}^2+\frac{\lambda_\alpha^3}{2}\left\{\sum_{h\neq\alpha}\frac{\lambda_h t_h^2}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^3}\right\}\left\{\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_l^2 t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^3}\right\}\\
&\quad+\frac{\lambda_\alpha^3}{4}t_\alpha^2\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\frac{\lambda_l\lambda_h^2 t_h^2}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^4(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}+\frac{t_\alpha^2}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha^3\lambda_l^3 t_l^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^6}\ ,
\end{aligned}
$$

$$
h_6=\frac{t_\alpha^2}{8}\left\{\sum_{l\neq\alpha}\lambda_\alpha^2\lambda_l^2 t_l^2/(\lambda_l-\lambda_\alpha)^4\right\}^2\ .
$$

これより$\sqrt{m}(f_\alpha-e_\alpha)$は漸近的に平均0, 共分散行列 $\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_\alpha\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_\alpha)^2},\frac{\lambda_\alpha\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_\alpha)^2},\cdots,\overset{\alpha}{0},\cdots,\frac{\lambda_\alpha\lambda_p}{(\lambda_p-\lambda_\alpha)^2}\right)$の退化した正規分布に従うことがわかる. 特に$t_\alpha=0$とおくことにより次の漸近展開を得る.

<u>定理1.1</u>. λ_αを単根とし$\Phi(x)$を標準正規分布の分布関数 $\psi_j(x)=\Phi^{(j)}(x)/\Phi(x)$とおくとき

$$
P\left(\bigcap_{h\neq\alpha}\sqrt{m}\frac{|\lambda_h-\lambda_\alpha|}{\sqrt{\lambda_h\lambda_\alpha}}f_{h\alpha}<x_h\right)=\left\{\prod_{l\neq\alpha}\Phi(x_l)\right\}\left[1+\frac{1}{m}(h_2+h_4)+O\left(\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
h_2 &= -\Delta\sum_{l\neq\alpha}\psi_2(x_l)+\sum_{l\neq\alpha}\frac{\psi_2(x_l)}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}\left(\lambda_\alpha^2+\lambda_l^2-\frac{1}{2}\lambda_\alpha\lambda_l\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_l}{\lambda_l-\lambda_\alpha}\psi_2(x_h)\ ,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
h_4 &= \frac{1}{4}\sum_{h\neq\alpha}\psi_4(x_h)+\frac{1}{4}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\psi_2(x_h)\psi_2(x_l)+\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l\psi_4(x_l)}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_l\lambda_\alpha\psi_2(x_h)\psi_2(x_l)}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)(\lambda_l-\lambda_\alpha)}\ .
\end{aligned}
$$

Sが $\overbrace{W_p(n,\Sigma)}^{\text{一般のWishart分布}}$ に従うときは α 番目に大きい固有根に対応する固有ベクトルを $\tilde{f}_\alpha$ とおけば $H'\Sigma H=\Gamma$ となる直交行列 H を用いて $\tilde{f}_\alpha = Hf_\alpha$ とかける. $\tilde{f}_\alpha=(\tilde{f}_{1\alpha},\cdots,\tilde{f}_{p\alpha})'$ とおけば(1.2)より h 番目の成分について次の漸近展開を得る.

定理1.2. $H=(h_{ij})$, $\tau^2=\sum_{\ell\neq\alpha}\{\lambda_\alpha\lambda_\ell/(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2\}h_{j\ell}^2$ とおき $\tau>0$ とする.

$$P(\sqrt{n}(\tilde{f}_{j\alpha}-h_{j\alpha})/\tau<x)=\Phi(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\frac{h_{j\alpha}}{2\tau}\Phi^{(1)}(x)\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_\ell}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2} \tag{1.4}$$

$$+\frac{1}{2}h_{j\alpha}\frac{\Phi^{(3)}(x)}{\tau^3}\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha^2\lambda_\ell^2h_{j\ell}^2}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^4}+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{3}h_{2j}\Phi^{(2j)}(x)/\tau^{2j}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

ただし $\tilde{f}_{j\alpha}$ の符号は $h_{j\alpha}$ の符号と同じものにとり h_2, h_4, h_6 は(1.2)式の h において t_ℓ のところを $h_{j\ell}$ $(\ell=1,2,\cdots,p)$ で置き換えたものとする.

$p=2$ のときはSugiyama (1971)により f_1 の%点がいくつか計算されているので上の漸近展開の近似のよさをcheckすることができる. $n=50$, $\lambda_1=1.4$, $\lambda_2=0.6$ のとき f_{21} の上側2.5%点は $\sin(0.35373)$, $n=50$, $\lambda_1=1.8$, $\lambda_2=0.2$ のとき f_{21} の上側2.5%点は $\sin(0.10734)$ であることがSugiyama (1971) TABLE 2よりわかる. (1.3)式より $\Delta=0$ ととり計算すれば

$P(f_{21}>x)$ $\quad n=50$

$\lambda_1=1.4$, $\lambda_2=0.6$ $\qquad$ $\lambda_1=1.8$, $\lambda_2=0.2$

$O(1)$の項	0.0163	0.02168
$O(m^{-1})$の項	0.0076	0.00326
近似値	0.0239	0.02494
正しい値	0.025	0.025

これらは比較的よい結果を与えているが，λ_1, λ_2がより接近すると近似が悪くなる．λ_1が単根という仮定より展開の係数分母に$\lambda_\ell - \lambda_1$という項が含まれているからである．

さて上の結果はf_αの漸近分布が退化していて$f_{\alpha\alpha}$の分布が別の形になることを示していた．退化していない極限分布が得られればその方が応用上使いやすいし又主成分分析等で係数の$f_{\alpha\alpha}$のみ特別扱いをするというのは好ましくないであろう．このような要求を満すには固有ベクトルの長さを1にとらないでα番目のSの固有根ℓ_αを用いて$\|f_\alpha\|^2 = \ell_\alpha$と正規化するとよい．この方法はAnderson (1963) にも述べられている．このときTaylor展開は

$$f_{k\alpha}(k \neq \alpha) = -\frac{\sqrt{\lambda_\alpha}\, a_{k\alpha}}{\lambda_k - \lambda_\alpha} - \frac{(\lambda_k + \lambda_\alpha)\, a_{\alpha\alpha} a_{k\alpha}}{2\sqrt{\lambda_\alpha}\,(\lambda_k - \lambda_\alpha)^2} + \frac{\sqrt{\lambda_\alpha}}{\lambda_k - \lambda_\alpha} \sum_{\ell \neq \alpha} \frac{a_{k\ell} a_{\ell\alpha}}{\lambda_\ell - \lambda_\alpha}$$

$$+ (\text{高次の項}) \qquad (1.5)$$

$$f_{\alpha\alpha} = \sqrt{\lambda_\alpha} + \frac{a_{\alpha\alpha}}{2\sqrt{\lambda_\alpha}} - \frac{a_{\alpha\alpha}^2}{8\lambda_\alpha\sqrt{\lambda_\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{\ell \neq \alpha} \frac{\lambda_\ell a_{\ell\alpha}^2}{(\lambda_\ell - \lambda_\alpha)^2} + (\text{高次の項})$$

これより$\sqrt{m}\,(f_\alpha - \sqrt{\lambda_\alpha}\, e_\alpha)$の特性関数を次のように評価でき

る.

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha^2\lambda_\ell t_\ell^2}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2}-\frac{1}{4}\lambda_\alpha t_\alpha^2\right\}\cdot\left[1+\frac{1}{\sqrt{m}}(i g_1+i^3 g_3)+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$g_1=\sqrt{\lambda_\alpha}\,t_\alpha\left\{\Delta-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sum_{\ell\neq\alpha}\lambda_\ell^2/(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2\right\},\tag{1.6}$$

$$g_3=\lambda_\alpha\sqrt{\lambda_\alpha}\left\{\frac{1}{24}t_\alpha^3+\lambda_\alpha t_\alpha\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\ell^2 t_\ell^2}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^3}-\frac{1}{2}\lambda_\alpha t_\alpha\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\ell^3 t_\ell^2}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^4}\right\}$$

これよりf_αの極限分布は退化しない正規分布であることおよび次の漸近展開を得る.

<u>定理 1.3.</u> Sは$W_p(n,\Gamma)$に従いλ_αは単根, $\|f_\alpha\|^2=\ell_\alpha$とする.

$$P\left(\bigcap_{h\neq\alpha}\frac{\sqrt{m}\,|\lambda_h-\lambda_\alpha|}{\sqrt{\lambda_h}\,\lambda_\alpha}f_{h\alpha}<x_h,\ \sqrt{\frac{2m}{\lambda_\alpha}}(f_{\alpha\alpha}-\sqrt{\lambda_\alpha})<x_\alpha\right)$$

$$=\left\{\prod_{\ell=1}^{p}\Phi(x_\ell)\right\}\Bigg[1+\sqrt{\frac{2}{m}}\Bigg\{\psi_1(x_\alpha)\Big(-\Delta+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\ell^2}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2}\Big)$$

$$-\frac{1}{12}\psi_3(x_\alpha)-\psi_1(x_\alpha)\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\ell\psi_2(x_\ell)}{\lambda_\ell-\lambda_\alpha}+\frac{1}{2}\psi_1(x_\alpha)\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\ell^2\psi_2(x_\ell)}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2}\Bigg]$$

$$+O\left(\frac{1}{m}\right)\tag{1.7}$$

<u>定理 1.4.</u> Sは$W_p(n,\Sigma)$に従い, λ_αは単根$\|\tilde{f}_\alpha\|^2=\ell_\alpha$で正規化する.

$$P(\sqrt{m}(\tilde{f}_{j\alpha}-h_{j\alpha})/\tau<x)=\Phi(x)-\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{g_1}{\tau}\Phi^{(1)}(x)+\frac{g_3}{\tau^3}\Phi^{(3)}(x)\right)+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

ただし$\tau^2=\sum_{\ell\neq\alpha}\lambda_\alpha^2\lambda_\ell h_{j\ell}^2/(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2+\frac{1}{2}\lambda_\alpha h_{j\alpha}^2$であり$g_1$, g_3は(1.6)式においてt_ℓに$h_{j\ell}$ $(\ell=1,2,\cdots,p)$を代入したものとする.

この場合退化しない正規分布を極限分布にもつのは利点であるが, $O(m^{-1})$の計算は(1.5)より明らかなようにTaylor

展開の項が多くなり$\|f_\alpha\|^2=1$の場合より一層面倒となる．又固有値と固有ベクトルの漸近的独立性もくずれてくる．Sugiyama (1966), Khatri and Pillai (1969) による固有ベクトルの精密分布を基にして本節で求めた漸近分布が求められれば面白いと思われる．

§2．二標本問題　$S_1=(s_{ij}^{(1)})$, $S_2=(s_{ij}^{(2)})$ を互いに独立で $W_p(n_1,\Gamma)$, $W_p(n_2,I)$ に従う Wishart 行列とする．ただし $\Gamma=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ $\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_p>0$ とする．$(S_2/n_2)^{-1}(S_1/n_1)$ のα番目に大きい固有値 l_α に対応する固有ベクトルを $f_\alpha=(f_{1\alpha},\cdots,f_{p\alpha})'$ $(f_{\alpha\alpha}>0)$ とする．$m_i=n_i-2\Delta_i$ (Δ_i：補正項) $m_i=\rho_i m$ $(\rho_i>0)$ $m=m_1+m_2$ とおき $m\to+\infty$ のときを考える。S_1/m_1 はΓに S_2/m_2 は I に確率収束することに注意して $a_{ij}=s_{ij}^{(1)}/m_1-\lambda_i\delta_{ij}$, $b_{ij}=s_{ij}^{(2)}/m_2-\delta_{ij}$ とおくとき Perturbation により次の Taylor 展開が得られる．(Sugiura (1974))．

$$
\begin{aligned}
f_{h\alpha}\,(h\neq\alpha) &= -\frac{a_{h\alpha}-\lambda_\alpha b_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}-\frac{(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})(a_{h\alpha}-\lambda_h b_{h\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\\
&+\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{hl}-\lambda_\alpha b_{hl})(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)(\lambda_l-\lambda_\alpha)}-\frac{(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})^2(a_{h\alpha}-\lambda_h b_{h\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^3}\\
&+\frac{b_{\alpha\alpha}(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})(a_{h\alpha}-\lambda_h b_{h\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}+\frac{a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{hl}-\lambda_\alpha b_{hl})(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})}{\lambda_l-\lambda_\alpha}\\
&+\frac{a_{h\alpha}-\lambda_h b_{h\alpha}}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})^2}{\lambda_l-\lambda_\alpha}+\frac{a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{hl}-\lambda_\alpha b_{hl})(a_{l\alpha}-\lambda_l b_{l\alpha})}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{\substack{l\neq\alpha\\ j\neq\alpha}}\frac{(a_{hl}-\lambda_\alpha b_{hl})(a_{lj}-\lambda_\alpha b_{lj})(a_{j\alpha}-\lambda_\alpha b_{j\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)(\lambda_l-\lambda_\alpha)(\lambda_j-\lambda_\alpha)} \tag{2.1}$$

$$-\frac{a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{b_{hl}(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})}{\lambda_l-\lambda_\alpha}+\frac{1}{2}\,\frac{a_{h\alpha}-\lambda_\alpha b_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}+(\text{高次の項})$$

$$f_{\alpha\alpha}=1-\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}-\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})(a_{l\alpha}-\lambda_l b_{l\alpha})}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^3}$$

$$+\sum_{\substack{l\neq\alpha\\ j\neq\alpha}}\frac{(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})(a_{lj}-\lambda_\alpha b_{lj})(a_{j\alpha}-\lambda_\alpha b_{j\alpha})}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2(\lambda_j-\lambda_\alpha)}+(\text{高次の項}).$$

これより $\sqrt{n}f_{h\alpha}\ (h\neq\alpha)$ は漸近的に $N(0,\tilde{\lambda}_h\lambda_\alpha/(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2)$, $\tilde{\lambda}_h=\lambda_h/\rho_1+\lambda_\alpha/\rho_2$ に従い $-2n(f_{\alpha\alpha}-1)$ は漸近的に χ^2分布の一次結合 $\sum_{l\neq\alpha}\{\tilde{\lambda}_l\lambda_\alpha/(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2\}\chi_l^2$ に従うことがわかる．ただし $\chi_1^2,\cdots,\chi_p^2$ は互いに独立な自由度1の χ^2分布に従う確率変数とする．$\sqrt{m}(f_\alpha-e_\alpha)$ の特性関数の漸近的な評価が(2.1)よりでき，その第1項は

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_l t_l^2/(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2\right\} \tag{2.2}$$

となる．更に次の漸近展開が得られる．

<u>定理 2.1.</u>　S_1, S_2 が互いに独立に $W_p(n_1,\Gamma)$, $W_p(n_2,I)$ に従い λ_α は単根とする．

$$P\Big(\bigcap_{h\neq\alpha}\frac{\sqrt{m}\,|\lambda_h-\lambda_\alpha|}{\sqrt{\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_h}}f_{h\alpha}<x_h\Big)=\Big\{\prod_{l\neq\alpha}\Phi(x_l)\Big\}\Big\{1+\frac{h_2+h_4}{m}+O\Big(\frac{1}{m\sqrt{m}}\Big)\Big\}$$

$$h_2=-\Delta\sum_{l\neq\alpha}\psi_2(x_l)-\Big(\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_2^2}\Big)\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_l\psi_2(x_l)}{\tilde{\lambda}_l(\lambda_l-\lambda_\alpha)}+\sum_{l\neq\alpha}\frac{\psi_2(x_l)}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}$$

$$\cdot\Big(\frac{\lambda_l^2}{\rho_1}+\frac{2\lambda_\alpha\lambda_l}{\rho_1\rho_2}+\frac{\lambda_\alpha^2}{\rho_2}-\frac{3}{2}\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_l\Big)+\frac{1}{2\rho_1}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ l\neq\alpha}}\sum_{h\neq l}\frac{\lambda_h\tilde{\lambda}_l\psi_2(x_h)}{\tilde{\lambda}_h(\lambda_l-\lambda_\alpha)}, \tag{2.3}$$

$$h_4=\frac{1}{4}\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\psi_4(x_\ell)}{\tilde\lambda_\ell^2}\left(\frac{\lambda_\ell^2}{\rho_1^2}+\frac{\lambda_\alpha^2}{\rho_2^2}\right)+\frac{1}{4}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ \ell\neq\alpha}}\sum_{h\neq\ell}\frac{\psi_2(x_\ell)\psi_2(x_h)}{\tilde\lambda_h\tilde\lambda_\ell}\left(\frac{\lambda_h\lambda_\ell}{\rho_1^2}+\frac{\lambda_\alpha^2}{\rho_2^2}\right)$$

$$+\frac{\lambda_\alpha}{2\rho_2}\left\{\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\psi_4(x_\ell)}{\lambda_\ell-\lambda_\alpha}+\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ \ell\neq\alpha}}\sum_{h\neq\ell}\frac{\psi_2(x_h)\psi_2(x_\ell)}{\lambda_\ell-\lambda_\alpha}\right\}+\frac{1}{2\rho_1\rho_2}\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\lambda_\ell\psi_4(x_\ell)}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2}$$

$$+\frac{1}{2\rho_1\rho_2}\sum_{\substack{h\neq\alpha\\ \ell\neq\alpha}}\sum_{h\neq\ell}\frac{\lambda_\alpha\lambda_h\tilde\lambda_\ell\psi_2(x_h)\psi_2(x_\ell)}{\tilde\lambda_h(\lambda_h-\lambda_\alpha)(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)}\ .$$

S_1, S_2が互いに独立で一般の Wishart 分布 $W_p(n_1,\Sigma_1)$, $W_p(n_2,\Sigma_2)$に従うときは，適当な正則行列 $P=(p_{ij})$をとり，$P'\Sigma_1P=\Gamma$, $P'\Sigma_2P=I$とすれば問題は前の場合に帰着される. このとき$\sqrt{m}(\tilde f_\alpha-Pe_\alpha)$の特性関数は極限が

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}t_it_j\left\{\sum_{\ell\neq\alpha}\frac{p_{i\ell}p_{j\ell}\lambda_\alpha\tilde\lambda_\ell}{(\lambda_\ell-\lambda_\alpha)^2}\right\}\right]$$

となり退化した正規分布である. $\tilde f_\alpha$の第h成分の分布の漸近展開も一標本のときと同様にできる. 又もし極限分布が退化しないようにするためには$\|f_\alpha\|^2=\ell_\alpha$と$(S_2/n_2)^{-1}(S_1/n_1)$の固有根を使い正規化すればよい. このとき$\sqrt{n}\,f_{h\alpha}$ $h=1,2,\cdots,p$は漸近的に互いに独立で$\sqrt{n}\,f_{h\alpha}$ $(h\neq\alpha)$は$N(0,\tilde\lambda_h\lambda_\alpha^2/(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2)$に$\sqrt{n}(f_{\alpha\alpha}-\sqrt{\lambda_\alpha})$は$N(0,\dfrac{\lambda_\alpha}{2\rho_1\rho_2})$に従うことが示され$O(m^{-1/2})$迄の漸近展開が求められる. (Sugiura (1974)). この他にも二標本問題については$f_\alpha'S_2f_\alpha=m_2$で$\|f_\alpha\|$を正規化することもできる. Anderson (1951), Konishi (1973) 等はこの正規化により固有値，固有ベクトルの極限分布を求めている. このとき Taylor 展開は

$$f_{h\alpha}(h\neq\alpha) = -\frac{a_{h\alpha}-\lambda_\alpha b_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha} + \frac{(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})b_{h\alpha}}{\lambda_h-\lambda_\alpha} + \frac{b_{\alpha\alpha}(a_{h\alpha}-\lambda_\alpha b_{h\alpha})}{2(\lambda_h-\lambda_\alpha)}$$

$$-\frac{(a_{\alpha\alpha}-\lambda_\alpha b_{\alpha\alpha})(a_{h\alpha}-\lambda_\alpha b_{h\alpha})}{(\lambda_h-\lambda_\alpha)^2} + \sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{hl}-\lambda_\alpha b_{hl})(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)(\lambda_h-\lambda_\alpha)} + (\text{高次の項})$$

$$f_{\alpha\alpha} = 1-\frac{1}{2}b_{\alpha\alpha}+\frac{3}{8}b_{\alpha\alpha}^2+\sum_{l\neq\alpha}\frac{b_{l\alpha}(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})}{\lambda_l-\lambda_\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{(a_{l\alpha}-\lambda_\alpha b_{l\alpha})^2}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2} + (\text{高次の項})$$

これより次の漸近展開を得る.

<u>定理 2.2.</u> $f_\alpha' S_2 f_\alpha = m_2$ で $\|f_\alpha\|$ を定めるとき定理2.1と同じ条件の下で

$$P\left(\bigcap_{h\neq\alpha}\frac{\sqrt{m}\,|\lambda_h-\lambda_\alpha|}{\sqrt{\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_h}}f_{h\alpha}<x_h,\ \sqrt{2\rho_2 m}\,(f_{\alpha\alpha}-1)<x_\alpha\right)$$

$$=\left\{\prod_{l=1}^{p}\Phi(x_l)\right\}\cdot\Bigg[1+\sqrt{\frac{2\rho_2}{m}}\Bigg\{\psi_1(x_\alpha)\Bigg(\Delta-\frac{3}{4\rho_2}+\frac{1}{2\rho_2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_l-\lambda_\alpha}+\frac{1}{4}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_l}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}\Bigg)$$

$$-\frac{5}{12\rho_2}\psi_3(x_\alpha)-\frac{\psi_1(x_\alpha)}{2\rho_2^2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha}{\tilde{\lambda}_l}\psi_2(x_l)-\frac{\psi_1(x_\alpha)}{2\rho_2}\sum_{l\neq\alpha}\psi_2(x_l)$$

$$+\frac{2\lambda_\alpha}{\rho_2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\psi_1(x_\alpha)\psi_2(x_l)}{\lambda_l-\lambda_\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{l\neq\alpha}\frac{\lambda_\alpha\tilde{\lambda}_l}{(\lambda_l-\lambda_\alpha)^2}\psi_1(x_\alpha)\,\psi_2(x_l)\Bigg\}+O\left(\frac{1}{m}\right)\Bigg].$$

重根のある場合の固有ベクトルの漸近分布に関するKonishi(1973)の結果より少し計算すれば定理2.2の第1項と同じものが求まる. Konishi(1973)の結果は条件付で一般の場合の極限分布を求めているのでそれを条件なしでの極限分布に直す必要がある. (単根の場合可能)

References

[1] *Anderson, T.W. (1951). The asymptotic distribution*

of certain characteristic roots and vectors. Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. 103-30.

[2] Anderson, T. W. (1963). Asymptotic theory for principal component analysis. Ann. Math. Statist. 34, 122-48.

[3] Khatri, C. G. and Pillai, K. C. S. (1969). Distributions of vectors corresponding to the largest roots of three matrices. Multivariate Analysis II Academic Press, N.Y.

[4] Konishi, S. (1973). 2つのWishart行列の固有値固有ベクトルの漸近分布　数理解析研講究録 197.

[5] Sugiura, N. (1974). Asymptotic expansions of the distributions of the latent roots or latent vector of Wishart matrices. In preparation.

[6] Sugiyama, T. (1966). On the distribution of the largest latent root and the corresponding latent vector for principal component analysis. Ann. Math. Statist. 37, 995-1001.

[7] Sugiyama, T. (1971). Tables of percentile points of a vector in principal component analysis. J. Jap. Statist. Soc. 1, 63-68.